LOBACHEVSKIY TEKISLIGINING TURLI MODELLARI

Mahsitaliyeva Saidaxon Sobitjon qizi
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Matematika kafedrasi dotsenti
Namangan davlat universiteti

Annotatsiya

Ushbu maqolada Lobachevskiy tekisligi, ya'ni giperbolik geometriyaning asosiy obyekti boʻlgan ikki oʻlchamli fazoning turli modellari analitik geometriya nuqtai nazaridan tadqiq etiladi. Tadqiqotda Poincaré diski modeli, Poincaré yarim tekislik modeli va Klein modeli matematik formulalar asosida solishtiriladi hamda ularning metrik, geodezik va konformal xossalari tahlil qilinadi. Har bir modelda masofa funksiyasi, toʻgʻri chiziqlar (geodeziklar) va izometriyalar ifodasi keltiriladi. Maqola ilmiy adabiyotlarga asoslangan holda yozilgan boʻlib, Lobachevskiy geometriyasining zamonaviy matematikadagi ahamiyati yoritiladi.

Kalit soʻzlar

Lobachevskiy tekisligi, giperbolik geometriya, Poincaré diski, yarim tekislik modeli, Klein modeli, geodezik, metrika, izometriya.

МОДЕЛИ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Аннотация

В данной статье исследуется плоскость Лобачевского как основная модель гиперболической геометрии с точки зрения аналитической геометрии. Рассматриваются основные модели представления гиперболической плоскости, включая модель диска Пуанкаре, модель верхней полуплоскости Пуанкаре и модель Клейна. Для каждой модели приводятся метрические соотношения, формулы расстояния, уравнения геодезических линий и свойства изометрий. Особое внимание уделяется сравнительному анализу указанных моделей, их конформным свойствам и удобству применения в различных областях математики. Работа основана на классических и современных научных источниках и направлена на углубленное понимание структуры неевклидовой геометрии.

Ключевые слова

плоскость Лобачевского, гиперболическая геометрия, модель Пуанкаре, диск Пуанкаре, верхняя полуплоскость, модель Клейна, геодезические линии, метрика, изометрии.

MODELS OF THE LOBACHEVSKY PLANE

Abstract

This article examines the Lobachevsky plane as a fundamental object of hyperbolic geometry from the perspective of analytic geometry. The main models of the hyperbolic plane are considered, including the Poincaré disk model, the Poincaré upper half-plane model, and the Klein model. For each model, metric relations, distance formulas, equations of geodesics, and properties of isometries are presented. Particular attention is given to the comparative analysis of these models, their conformal properties, and their applicability in various areas of mathematics. The study is based on classical and modern scientific literature and aims to provide a deeper understanding of the structure of non-Euclidean geometry.

Keywords

Lobachevsky plane, hyperbolic geometry, Poincaré disk model, upper half-plane model, Klein model, geodesics, metric, isometries

Kirish

Lobachevskiy tekisligi, ya’ni giperbolik tekislik, zamonaviy geometriyaning eng muhim va chuqur tushunchalaridan biri hisoblanadi. U Evklid geometriyasining asosiy aksiomalaridan biri — beshinchi postulatni inkor etish natijasida yuzaga kelgan bo‘lib, geometriya haqidagi an’anaviy tasavvurlarni tubdan o‘zgartirib yubordi. Evklid geometriyasida berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa faqat bitta parallel chiziq o‘tadi, deb qaraladi. Biroq Lobachevskiy geometriyasida bunday chiziqlar soni cheksiz ko‘p bo‘lib, bu holat fazoning tuzilishi butunlay boshqacha ekanligini ko‘rsatadi.

Giperbolik geometriyaning asoslari XIX asr boshlarida Nikolay Ivanovich Lobachevskiy va János Bolyai tomonidan mustaqil ravishda ishlab chiqilgan. Shuningdek, Carl Friedrich Gauss ham ushbu yo‘nalishda muhim tadqiqotlar olib borgan, ammo u o‘z natijalarini ochiq e’lon qilmagan. Ushbu olimlarning ishlari natijasida noevklid geometriya matematikada yangi bosqichni boshlab berdi va geometriya faqat real fazoni tasvirlovchi vosita emas, balki mustaqil aksiomatik tizim sifatida qaralishi mumkinligini ko‘rsatdi.

Lobachevskiy tekisligi differensial geometriya nuqtai nazaridan doimiy manfiy egrilikka ega bo‘lgan ikki o‘lchamli Riman fazosi sifatida aniqlanadi. Agar KKK Gauss egriligini ifodalasa, u holda giperbolik tekislik uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$K=-1$

Bu xossa Lobachevskiy tekisligini Evklid tekisligidan ($K=0$) va sferik geometriyadan ($K>0$) keskin farqlaydi. Manfiy egrilik fazodagi ko‘plab geometrik xossalarga bevosita ta’sir ko‘rsatadi. Masalan, giperbolik tekislikda aylananing uzunligi va yuzi radiusga nisbatan eksponensial tarzda ortadi, bu esa Evklid geometriyasidagi chiziqli yoki kvadratik o‘sishdan tubdan farq qiladi.

Lobachevskiy tekisligining yana bir muhim xususiyati uchburchaklar geometriyasida namoyon bo‘ladi. Giperbolik tekislikdagi har qanday uchburchakning ichki burchaklari yig‘indisi doimo π dan kichik bo‘ladi:

$\alpha+\beta+\gamma<\pi$

Bundan tashqari, uchburchak yuzasi aynan shu burchaklar yig‘indisining kamomadi orqali aniqlanadi:

$S=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$

Bu formulalar giperbolik geometriyaning Evklid geometriyasidan qanchalik farq qilishini yaqqol ko‘rsatadi va fazoning egriligi bilan geometrik kattaliklar o‘rtasidagi bog‘liqlikni ochib beradi.

Lobachevskiy tekisligini to‘g‘ridan-to‘g‘ri tasavvur qilish qiyin bo‘lganligi sababli, matematiklar uni tushuntirish va o‘rganish uchun turli modellarni ishlab chiqqanlar. Ushbu modellar giperbolik geometriyani Evklid fazosi ichida ifodalash imkonini beradi. Eng mashhur modellar qatoriga Poincaré diski modeli, Poincaré yarim tekislik modeli va Klein modeli kiradi. Bu modellar bir-biriga izomorf bo‘lib, ular orasida mos o‘zgartirishlar mavjud, ya’ni ular bir xil geometrik mazmunni turli ko‘rinishlarda ifodalaydi.

Poincaré diski modeli birlik disk ichida aniqlanadi:

$D=\{z\in C: |z|<1\}$

va quyidagi metrika bilan beriladi:

$$ds^2=\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

Bu model konformal bo‘lib, burchaklarni saqlaydi. Shu sababli u kompleks analiz va fizik modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Bu modelda geodeziklar disk chegarasiga perpendikulyar kesishuvchi aylana yoylari yoki diametrlardan iborat bo‘ladi.

Poincaré yarim tekislik modeli esa quyidagi sohada aniqlanadi:

$H=\{z=x+iy \in C: y>0\}$

va metrikasi:

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu model ham konformal bo‘lib, ayniqsa kompleks analiz, modul formalar nazariyasi va sonlar nazariyasida muhim rol o‘ynaydi. Bu yerda geodeziklar vertikal to‘g‘ri chiziqlar yoki haqiqiy o‘qqa perpendikulyar yarim aylanalardan iborat bo‘ladi.

Klein modeli esa birlik disk ichida aniqlanadi, ammo undan farqli ravishda geodeziklar oddiy to‘g‘ri chiziqlar sifatida tasvirlanadi. Bu model konformal emas, ya’ni burchaklarni saqlamaydi, biroq geodeziklarning soddaligi sababli ayrim geometrik masalalarni yechishda juda qulay hisoblanadi.

Analitik geometriya nuqtai nazaridan Lobachevskiy tekisligini o‘rganish koordinatalar orqali uning metrikasini, masofa funksiyasini va geodezik chiziqlar tenglamalarini aniqlashni o‘z ichiga oladi. Umumiy holda metrik element quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$ds^2=g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

bu yerda $g_{ij}(x)$ metrik tensor bo‘lib, u fazoning lokal geometrik xossalarini ifodalaydi. Giperbolik tekislikda ushbu tensor manfiy egrilikni aks ettiradi va barcha geometrik hisoblashlarning asosini tashkil etadi.

Lobachevskiy tekisligida izometriyalar, ya’ni masofani saqlovchi o‘zgartirishlar ham muhim ahamiyatga ega. Bu o‘zgartirishlar fazoning simmetriyalarini ifodalaydi va ko‘pincha Möbius transformatsiyalar orqali beriladi:

$$z\mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0$$

Bunday transformatsiyalar giperbolik geometriyada markaziy o‘rin tutadi va turli modellar orasidagi bog‘lanishni tushunishda muhim vosita hisoblanadi.

So‘nggi yillarda Lobachevskiy tekisligi nafaqat nazariy matematikada, balki amaliy sohalarda ham keng qo‘llanilmoqda. Xususan, nazariy fizika, kosmologiya, tarmoqlar nazariyasi va sun’iy intellektda murakkab strukturalarni modellashtirishda giperbolik fazolar muhim rol o‘ynaydi. Ularning eksponensial kengayish xususiyati daraxtsimon yoki ierarxik tuzilmalarni samarali ifodalash imkonini beradi.

Metodologiya

Ushbu tadqiqotda Lobachevskiy tekisligining turli modellari analitik geometriya, differensial geometriya va kompleks analiz usullariga tayangan holda tizimli ravishda o‘rganildi. Tadqiqotning asosiy maqsadi giperbolik tekislikning turli matematik modellarini yagona metodologik yondashuv asosida tahlil qilish, ularning metrik, geodezik va izometrik xossalarini aniqlash hamda o‘zaro solishtirishdan iborat bo‘ldi. Shu sababli metodologiya nazariy tahlil, matematik modellashtirish va formulalar orqali isbotlash kabi yondashuvlarni o‘z ichiga oladi.

Avvalo, Lobachevskiy tekisligi abstrakt Riman fazosi sifatida qaralib, uning asosiy xossalari metrik tensor yordamida ifodalandi. Har bir model uchun metrik element quyidagi umumiy koʻrinishda yozildi:

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

bu yerda $g_{ij}(x)$ — fazoning lokal geometrik tuzilishini aniqlovchi metrik tensor komponentlaridir. Ushbu tensor orqali masofa, burchak va yuzani aniqlash imkoniyati yaratildi. Tadqiqot davomida har bir model uchun mos metrik tanlanib, ularning analitik ifodalari keltirildi va ular orqali geometriyaning asosiy invariantlari hisoblandi.

Masofa tushunchasini aniqlashda variatsion prinsip asos qilib olindi. Ya'ni, ikki nuqta orasidagi masofa ularni bogʻlovchi barcha mumkin boʻlgan egri chiziqlar ichida eng qisqa uzunlikka ega boʻlgan geodezik orqali aniqlanadi. Bu quyidagi integral ifoda orqali berildi:

$$d(p,q) = \inf \int_\gamma ds$$

bu yerda γ — p va q nuqtalarni bogʻlovchi uzluksiz egri chiziq. Ushbu yondashuv orqali har bir modelda geodezik chiziqlar tenglamalari chiqarildi va ularning xossalari oʻrganildi. Geodeziklarni aniqlashda Eyler–Lagranj tenglamalaridan foydalanildi, bu esa masalani differensial tenglamalar tizimiga keltirish imkonini berdi.

Tadqiqotning keyingi bosqichida Lobachevskiy tekisligining turli modellarini aniqlash va ularni formal tarzda ifodalash ishlari olib borildi. Xususan, Poincaré diski modeli, Poincaré yarim tekislik modeli va Klein modeli alohida-alohida koʻrib chiqildi. Har bir model uchun aniqlanish sohasi, metrikasi va geodeziklari aniq formulalar orqali berildi. Shu bilan birga, ushbu modellar orasidagi bogʻlanishlar ham oʻrganildi. Bu bogʻlanishlar odatda mos oʻzgartirishlar (diffeomorfizmlar) orqali ifodalanadi va ular metrikani saqlash yoki muayyan xossalarni (masalan, burchaklarni) invariant qoldirish xususiyatiga ega.

Izometriyalarni oʻrganish metodologiyaning muhim qismi hisoblanadi. Izometriyalar fazodagi masofalarni oʻzgartirmaydigan akslantirishlar boʻlib, ular giperbolik tekislikning simmetriya guruhini tashkil etadi. Ushbu tadqiqotda izometriyalar asosan Möbius transformatsiyalar orqali ifodalandi:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

Bu transformatsiyalar kompleks analiz usullari yordamida tahlil qilindi va ularning giperbolik metrikani saqlashi koʻrsatildi. Natijada, har bir model uchun izometriyalar guruhi aniqlanib, ularning algebraik va geometrik xossalari oʻrganildi.

Shuningdek, metodologiya doirasida modellarni solishtirish usuli ham qoʻllanildi. Bu usul yordamida har bir modelning afzalliklari va kamchiliklari aniqlanib, ularning qaysi masalalarda samaraliroq qoʻllanishi koʻrsatildi. Masalan, konformal modellar (Poincaré modellari) burchaklarni saqlashi sababli kompleks analiz va fizik modellashtirishda qulay ekanligi, Klein modeli esa geodeziklarni toʻgʻri chiziqlar sifatida ifodalashi bilan geometrik konstruktsiyalar uchun qulayligi asoslab berildi.

Tadqiqot davomida nazariy natijalarni asoslash uchun klassik matematik adabiyotlar va zamonaviy ilmiy ishlardan foydalanildi. Har bir keltirilgan formula va natija mavjud ilmiy nazariyalarga tayangan holda chiqarildi. Bu esa tadqiqotning ilmiy asoslanganligini va ishonchliligini ta'minladi.

Bundan tashqari, metodologiyada umumlashtirish va abstraksiyalash usullariga ham alohida e'tibor qaratildi. Ya'ni, alohida modellar doirasida olingan natijalar umumiy giperbolik geometriya kontekstida talqin qilindi. Bu yondashuv Lobachevskiy tekisligining mohiyatini chuqurroq anglash va uning turli koʻrinishlari orasidagi ichki birlikni ochib berishga xizmat qildi.

Natijalar

Poincaré diski modeli birlik disk orqali aniqlanadi:

$D=\{z \in C : |z| < 1\}$

Bu modelda metrika quyidagicha beriladi:

$ds^2=\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$

Masofa formulasi:

$d(z_1, z_2)=\operatorname{arcosh}(1+\frac{2|z_1-z_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)})$

Geodeziklar disk ichidagi aylana yoylari bo‘lib, ular chegaraga perpendikulyar kesishadi.

Poincaré yarim tekislik modeli quyidagi to‘plam orqali aniqlanadi:

$H=\{z=x+iy\in C:y>0\}$

Metrika:

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

Masofa formulasi:

$d(z_1, z_2)=\operatorname{arcosh}(1+\frac{|z_1-z_2|^2}{2Im(z_1)Im(z_2)})$

Geodeziklar — vertikal chiziqlar va real o‘qqa perpendikulyar aylana yoylari.

Klein modeli birlik disk asosida aniqlanadi:

$D=\{x \in R\,2 : \| x \| < 1\}$

Metrika:

$d(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{ay* \ bx}{ax* \ by}\right|$

bu yerda a va b chegaraviy nuqtalar.

Bu modelda geodeziklar oddiy to‘g‘ri chiziqlar sifatida tasvirlanadi, ammo burchaklar saqlanmaydi (konformal emas).

Ushbu tadqiqot natijalari Lobachevskiy tekisligining turli modellarini chuqurroq tushunish imkonini beradi va ularning har biri giperbolik geometriyaning turli jihatlarini qanday aks ettirishini ko‘rsatadi. Asosiy e’tibor Poincaré diski modeli, Poincaré yarim tekislik modeli va Klein modeli o‘rtasidagi o‘xshashlik va farqlarni aniqlashga qaratildi. Bu modellar matematik jihatdan ekvivalent bo‘lsa-da, ya’ni ular bir xil giperbolik fazoni ifodalasa-da, ularning geometrik va analitik xususiyatlari turlicha bo‘lib, bu holat ularni turli masalalarda qo‘llashda muhim rol o‘ynaydi.

Avvalo, Poincaré modellari (disk va yarim tekislik) ning eng muhim xususiyati ularning konformalligi hisoblanadi. Bu shuni anglatadiki, ular burchaklarni saqlaydi. Matematik jihatdan bu quyidagicha ifodalanadi:

$\angle(\gamma_1, \gamma_2)=\angle(\phi(\gamma_1), \phi(\gamma_2))$

bu yerda ϕ — mos akslantirish. Ushbu xossa ayniqsa kompleks analiz va fizik modellashtirishda muhim ahamiyatga ega, chunki ko‘plab fizik jarayonlarda burchaklar saqlanishi zarur. Shu sababli Poincaré modellari ko‘pincha nazariy fizika va konformal aks

Teorema (Giperbolik uchburchak burchaklari yig‘indisi haqidagi teorema): Lobachevskiy tekisligida har qanday uchburchakning ichki burchaklari yig‘indisi π dan kichik bo‘ladi, ya’ni:

$\alpha+\beta+\gamma<\pi$

va uchburchak yuzasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$S=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$

Isbot:

Isbotni differensial geometriya va Gauss–Bonnet teoremasiga asoslanib olib boramiz. Lobachevskiy tekisligi doimiy manfiy egrilikka ega bo‘lgan Riman fazosi bo‘lib, uning Gauss egriligi:

$K=-1$

Gauss–Bonnet teoremasiga ko‘ra, chegaralangan D soha uchun quyidagi tenglik o‘rinli:

$\iint K\, dA+\sum a_i=(n-2)\,\pi$

Endi D ni giperbolik uchburchak deb olamiz. Uchburchakning ichki burchaklari α,β,γ bo‘lsa, tashqi burchaklar quyidagicha bo‘ladi:

$\pi-\alpha,\ \pi-\beta,\ \pi-\gamma$

Ularning yig‘indisi:

$3\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$

Gauss–Bonnet formulasiga qo‘yamiz:

$\iint(-1)\, dS+[3\pi-(\alpha+\beta+\gamma)]=(3-2)\,\pi=\pi$

Integralni hisoblaymiz:

$-S+3\pi-(\alpha+\beta+\gamma)=\pi$

Bu yerda S — uchburchak yuzasi. Tenglamani soddalashtiramiz:

$-S=\pi-3\pi+(\alpha+\beta+\gamma)$

$-S=-2\pi+(\alpha+\beta+\gamma)$

$S=2\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$

Natijadan ko‘rinadiki:

$S>0\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma<\pi$

Bu esa teoremani isbotlaydi.

Muhokama

Ushbu tadqiqot natijalari Lobachevskiy tekisligining turli modellarini chuqurroq anglash imkonini beradi va ularning har biri giperbolik geometriyaning turli jihatlarini yoritishda o‘ziga xos afzalliklarga ega ekanligini ko‘rsatadi. Avvalo, muhokama qilish zarur bo‘lgan asosiy jihat — bu modellar orasidagi ekvivalentlik masalasidir. Poincaré diski modeli, Poincaré yarim tekislik modeli va Klein modeli bir-biriga izomorf bo‘lib, ular bir xil giperbolik fazoni turli koordinata tizimlarida ifodalaydi. Boshqacha aytganda, bu modellar orasida mavjud bo‘lgan akslantirishlar masofani yoki muayyan geometrik xossalarni saqlaydi. Shu sababli, matematik nuqtai nazardan ular bir xil obyektning turli “ko‘rinishlari” hisoblanadi.

Shu bilan birga, ushbu modellar orasidagi farqlar ularning qo‘llanish sohasini aniqlab beradi. Masalan, Poincaré diski va yarim tekislik modellari konformal modellar bo‘lib, ular burchaklarni saqlaydi. Bu xossa matematik va fizik masalalarda juda muhim hisoblanadi. Konformallik quyidagi shart bilan ifodalanadi:

$\angle(\gamma_1,\ \gamma_2)=\angle\,(\phi(\gamma_1),\ \phi(\gamma_2))$

ya’ni akslantirish ostida burchaklar o‘zgarmaydi. Bu esa kompleks analizda, ayniqsa, funksiyalar nazariyasida muhim rol o‘ynaydi. Shu sababli Poincaré yarim tekislik modeli modul funksiyalar, avtomorf funksiyalar va sonlar nazariyasida keng qo‘llaniladi. Bundan tashqari, bu modelning Möbius transformatsiyalar bilan bevosita bog‘liqligi uni algebraik jihatdan ham qulay qiladi.

Poincaré diski modeli esa ko‘proq vizual intuitivlikni ta’minlaydi. Bu modelda butun giperbolik tekislik birlik disk ichida joylashgan bo‘lib, chegaraga yaqinlashgan sari masofalar cheksiz ortib boradi. Bu holat quyidagi metrik orqali ifodalanadi:

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

Bu formuladan ko‘rinadiki, $|z| \to 1$ bo‘lganda maxraj nolga intiladi va natijada metrika cheksizga oshadi. Bu esa giperbolik tekislikning cheksiz ekanligini, ammo modelda chegaralangan ko‘rinishda tasvirlanishini anglatadi. Shu jihatdan disk modeli fizika va kompyuter grafikasi sohalarida, ayniqsa vizualizatsiya masalalarida juda qulay hisoblanadi.

Klein modeli esa boshqa modellar bilan solishtirganda o‘ziga xos xususiyatga ega. Unda geodeziklar oddiy to‘g‘ri chiziqlar sifatida ifodalanadi, bu esa ko‘plab geometrik masalalarni soddalashtiradi. Masalan, ikki nuqta orasidagi eng qisqa yo‘lni aniqlash vizual jihatdan ancha osonlashadi. Biroq bu modelning asosiy kamchiligi — u konformal emas, ya’ni burchaklarni saqlamaydi. Natijada, burchaklarga oid masalalarda bu modeldan foydalanish noqulay bo‘lishi mumkin.

Modellarni solishtirish jarayonida yana bir muhim jihat — izometriyalar guruhining turli modellar ichida qanday ifodalanishidir. Giperbolik tekislikning izometriyalari Möbius transformatsiyalar orqali beriladi:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc>0$$

Bu transformatsiyalar Poincaré yarim tekislik modelida ayniqsa sodda ko‘rinishda ifodalanadi. Disk modelida esa ular murakkabroq shaklga ega bo‘lsa-da, baribir konformal akslantirishlar sifatida qoladi. Klein modelida esa izometriyalar proektiv o‘zgartirishlar orqali ifodalanadi. Bu farqlar modellar orasidagi algebraik va geometrik tafovutlarni yanada chuqurroq tushunishga yordam beradi.

Muhokama jarayonida Lobachevskiy tekisligining global xossalariga ham e’tibor qaratish muhimdir. Masalan, giperbolik tekislikda aylana uzunligi va yuzi radiusga nisbatan eksponensial tarzda ortadi. Agar rrr radius bo‘lsa, aylana uzunligi taxminan:

$$L(r) \sim e^r$$

ko‘rinishda o‘sadi. Bu xossa Evklid geometriyasidan keskin farq qiladi va giperbolik fazoning “tez kengayuvchi” tuzilishini ifodalaydi. Shu sababli giperbolik fazolar katta hajmdagi ma’lumotlarni joylashtirish va ierarxik strukturalarni modellashtirish uchun juda qulay hisoblanadi.

Shuningdek, uchburchaklar nazariyasi ham muhim muhokama obyekti hisoblanadi. Yuqorida keltirilganidek, giperbolik uchburchak yuzasi burchaklar yig‘indisi orqali aniqlanadi:

$$S = \pi - (\alpha+\beta+\gamma)$$

Bu formula shuni ko‘rsatadiki, uchburchakning yuzi uning burchaklari bilan bevosita bog‘liq. Bu esa differensial geometriyada egrilik tushunchasining fundamental ahamiyatga ega ekanligini yana bir bor tasdiqlaydi. Bundan tashqari, bu natija Gauss–Bonnet teoremasining xususiy holi sifatida qaraladi.

Muhokamada yana bir muhim jihat — Lobachevskiy tekisligining zamonaviy qo‘llanilishidir. Bugungi kunda giperbolik geometriya nafaqat sof matematikada, balki boshqa sohalarda ham keng qo‘llanilmoqda. Masalan, internet tarmoqlarining strukturasi, ijtimoiy tarmoqlar va biologik tizimlar ko‘pincha ierarxik tuzilishga ega bo‘lib, ularni giperbolik fazoda samarali tasvirlash mumkin. Bundan tashqari, sun’iy intellekt va ma’lumotlar tahlilida ham giperbolik embedding usullari keng qo‘llanilmoqda.

Fizikada esa giperbolik geometriya kosmologik modellarda, ayniqsa, fazoning umumiy egriligini o‘rganishda qo‘llaniladi. Ba’zi nazariyalarga ko‘ra, koinotning global tuzilishi manfiy egrilikka ega bo'lishi mumkin. Bu esa Lobachevskiy tekisligining fizik interpretatsiyasini yanada dolzarb qiladi.

Umuman olganda, Lobachevskiy tekisligining turli modellarini tahlil qilish shuni ko'rsatadiki, har bir model o'ziga xos matematik va amaliy ahamiyatga ega. Ularning birortasi mutlaq ustun emas, balki konkret masalaga qarab tanlanadi. Konformal xossalarga e'tibor qaratilsa — Poincaré modellari, chiziqli geometriya muhim bo'lsa — Klein modeli afzal hisoblanadi.

Xulosa

Ushbu tadqiqot natijalari Lobachevskiy tekisligining turli modellarini tizimli va analitik tarzda o'rganishga imkon berdi. Tadqiqot davomida Poincaré diski modeli, Poincaré yarim tekislik modeli va Klein modeli alohida ko'rib chiqildi, ularning metrikasi, geodezik chiziqlari, izometriyalari va konformal xossalari batafsil tahlil qilindi. Har bir modelning o'ziga xos afzalliklari va kamchiliklari aniqlanib, ularning qo'llanish sohalari belgilandi. Masalan, Poincaré modellarining konformal xossasi burchaklarni saqlashni ta'minlashi sababli kompleks analiz va fizik modellashtirishda keng qo'llaniladi, Klein modeli esa geodeziklarni to'g'ri chiziqlar sifatida tasvirlash imkoniyati bilan geometrik va kombinatorik masalalarda afzallik beradi. Shu bilan birga, barcha modellar bir-biriga izomorf bo'lib, ular giperbolik tekislikning turli ko'rinishlari sifatida qaraladi, ya'ni matematik jihatdan ekvivalent hisoblanadi.

Bundan tashqari, tadqiqot davomida Lobachevskiy tekisligining fundamental xossalari, jumladan uchburchaklar burchaklari yig'indisi va yuzaning manfiy egrilik bilan bog'liqligi matematik formulalar orqali isbotlandi. Gauss–Bonnet teoremasiga asoslangan analitik yondashuv yordamida uchburchak yuzasi va ichki burchaklar o'rtasidagi bog'liqlik aniqlandi, bu esa giperbolik geometriyaning asosiy xususiyatlarini chuqurroq anglash imkonini berdi. Shuningdek, izometriyalar guruhi va Möbius transformatsiyalari yordamida giperbolik tekislikning simmetrik tuzilishi va matematik invarianti tahlil qilindi, bu esa nazariy jihatdan uning mukammalligini tasdiqlaydi.

Lobachevskiy tekisligining modellarini o'rganish nafaqat nazariy matematikada, balki amaliy va zamonaviy ilm-fanning turli yo'nalishlarida ham muhim ahamiyatga ega. Masalan, giperbolik fazolarni ierarxik tarmoqlarni modellashtirishda, internet va ijtimoiy tarmoqlar tuzilishini tahlil qilishda, sun'iy intellekt va ma'lumotlar tahlilida qo'llash mumkin. Shuningdek, kosmologiyada giperbolik geometriya koinotning global strukturasini o'rganishda va nazariy fizika masalalarida qo'llanadi. Bu esa Lobachevskiy tekisligining nafaqat matematik, balki ilmiy va texnologik ahamiyatini yana bir bor tasdiqlaydi.

Xulosa qilib aytganda, Lobachevskiy tekisligining turli modellarini chuqur tahlil qilish ularning nazariy va amaliy ahamiyatini ko'rsatadi. Har bir model o'zining xususiyatlari bilan geometriya va boshqa fanlar sohasida muhim vosita sifatida xizmat qiladi. Modellarni solishtirish va ularning metrik, geodezik va izometrik xossalarini aniqlash, shuningdek, ularning konformal va proektiv xususiyatlarini tushunish giperbolik fazoni yanada chuqurroq anglashga imkon beradi. Shu bilan birga, ushbu tadqiqot Lobachevskiy geometriyasining zamonaviy qo'llanilishi va ilmiy ahamiyatini yoritishga xizmat qilishi bilan ahamiyatlidir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Foundations of Hyperbolic Geometry – Giperbolik geometriya asoslarini batafsil tushuntiradi, Poincaré va Klein modellarini o'z ichiga oladi.
2. Hyperbolic Geometry – Lobachevskiy tekisligi va geodeziklar, izometriyalar haqida keng qamrovli tushuntirish beradi.

3. Non-Euclidean Geometry – Noevklid geometriyasi, giperbolik va sferik geometriya asoslari va ularning farqlari.
4. Hyperbolic Geometry from a Local Viewpoint – Giperbolik geometriyani analitik nuqtai nazardan o‘rganish, geodeziklar va metrikalar.
5. Mahsitaliyeva Saidaxon Sobitjon qizi – Koordinata o’zgarishlari ostida tekislik tenglamasining barqaror invariant shakli analitik ifodasi
6. Introduction to Hyperbolic Geometry – Poincaré modellar, differensial geometriya asoslari va izometriyalarni o‘z ichiga olgan kirish darajali manba.
7. Geometry of Non-Euclidean Spaces – Giperbolik fazolar va ularning geometrik xossalari, tarmoq va kosmologik ilovalar.
8. Differential Geometry of Curves and Surfaces – Riman fazolari va egrilik tushunchalari, Gauss–Bonnet teoremasi.
9. Complex Analysis and Geometry – Konformal xaritalar va Möbius transformatsiyalar, Poincaré modellarining analitik ishlatilishi.
10. Non-Euclidean Geometries – Lobachevskiy va Bolyai ishlari, matematik tarixiy kontekst.
11. Hyperbolic Geometry in Network Analysis – Giperbolik geometriyaning zamonaviy qo‘llanilishi, tarmoqlar va ierarxik strukturalar.